付録

行列計算の基礎

付録　行列計算の基礎

○　ここでは，産業連関分析に使われる行列の定義において，主なものを示します。

行列の加法・減法・実数倍

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A+B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ a_3-b_3 & a_4-b_4 \end{pmatrix}$$

$$kA = k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{pmatrix}$$

行列の積

　行列Aをm行×n列の行列，行列Bをp行×q列の行列とする。このとき，行列の積ABが成り立つには，［n＝p］でなくてはならず，積の答ABはm行×q列の行列となります。
したがって，ABが計算できるからと言って，BAが計算できるとはかぎりません。

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AX=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x+a_2y \\ a_3x+a_4y \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \qquad \text{（3行1列）×（1行3列）}$$

$$\Rightarrow \quad CD=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_1d_1 & c_1d_2 & c_1d_3 \\ c_2d_1 & c_2d_2 & c_2d_3 \\ c_3d_1 & c_3d_2 & c_3d_3 \end{pmatrix} \text{（3行×3列）}$$

以下出てくる行列Aを

$$\text{行列A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

とする

単位行列

対角成分が1, 残りの成分が 0 である行列は, 数での1のような役割をし, その行列を単位行列と呼び, I で表します。

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

行列AにおいてAI＝IA＝Aが成り立つ。

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

逆行列

数の計算における逆数のような性質をもつ行列を考えます。いま, Aに対して, AX＝XA＝I である行列Xが存在するとき, XはAの逆行列と言い, A^{-1}で表します。

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

行列を用いた連立一次方程式の解法

ｘ＋８ｙ＋６ｚ＝３
４ｘ＋３ｙ＋６ｚ＝６
２ｘ＋２ｙ＋３ｚ＝９　という連立方程式を考えます。

これを，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

となります。

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

の逆行列は計算の結果以下の通りです。

$$\begin{pmatrix} -0.33 & -1.33 & 3.33 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0.22 & 1.56 & -3.22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.33 & -1.33 & 3.33 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0.22 & 1.56 & -3.22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.33 & -1.33 & 3.33 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0.22 & 1.56 & -3.22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.33 & -1.33 & 3.33 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0.22 & 1.56 & -3.22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I \text{ なので}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.33 & -1.33 & 3.33 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0.22 & 1.56 & -3.22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix}$$

逆行列を先程の行列式の両辺に，左側からかけます。

よって，ｘ＝21，ｙ＝12，ｚ＝－19が導き出されます。